ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXXV, z. 1 – 1987

LUDWIK BORKOWSKI

DOWÓD RÓWNOWAŻNOŚCI DWÓCH SFORMUŁOWAŃ KLASYCZNEJ DEFINICJI PRAWDY

Zadaniem tego artykułu jest podanie dowodu równoważności dwóch sformułowań klasycznej definicji prawdziwości wyrażeń zdaniowych (do których należą zdania będące wyrażeniami zdaniowymi nie zawierającymi zmiennych wolnych i formy zdaniowe będące wyrażeniami zdaniowymi zawierającymi zmienne wolne). Pierwszą definicją jest przyjmowana obecnie w logice definicja prawdziwości wyrażenia zdaniowego w modelu M, w której posługujemy się pojęciem spełniania wyrażenia w modelu M przy wartościowaniu h. Druga definicja formułuje za pomocą środków logiki współczesnej to określenie prawdziwości zdań, w myśl którego zdanie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stan rzeczy opisywany przez to zdanie. Definicję taką podałem w artykule *Pewna wersja definicji klasycznego pojęcia prawdy*[1]. Definicja podana w obecnym artykule zachowuje zasadniczy sens intuicyjny sformułowanego tam określenia, ale różni się w pewnych punktach. W obecnym artykule posługuję się pojęciem stanu rzeczy opisywanego przez dane wyrażenie zdaniowe w modelu M przy wartościowaniu h. Definicję formułuję dla języków dowolnego rzędu i podaję jednolite określenie stanów rzeczy opisywanych przez wyrażenia atomiczne.

Przyjmujemy, że język J jest językiem dowolnego rzędu, w którym oprócz stałych logicznych (funktorów prawdziwościowych, kwantyfikatorów, znaku identyczności) i nawiasów występują zmienne i ewentualnie stałe pozalogiczne, należące do kategorii składniowych nazw jednostkowych, predykatów lub znaków funkcyjnych określonego rzędu. Przyjmujemy, że zmiennymi języka J są symbole: x_1, x_2, ... (z ewentualnymi wskaźnikami kategorii składniowych u góry). W metajęzyku

[1] "Roczniki Filozoficzne", 28 (1980), z. 1, s. 119-131.

języka J używamy liter φ, ψ dla oznaczania wyrażeń zdaniowych języka J, a symboli: W_o, W_1, ... dla oznaczania wyrażeń nazwowych, predykatowych lub funkcyjnych (zmiennych lub stałych) języka J.

Określamy spełnianie wyrażenia φ w modelu M równym $\langle B, f \rangle$, gdzie B jest dowolnym niepustym zbiorem, a f jest funkcją interpretującą określoną na zbiorze wszystkich stałych pozalogicznych języka J.

Posłużymy się następującą terminologią. Przedmiotami zerowego rzędu o bazie B są elementy zbioru B. Przedmiotami pierwszego rzędu o bazie B są podzbiory zbioru B lub relacje zachodzące między elementami zbioru B. Przedmiotami n-go rzędu o bazie B są zbiory przedmiotów rzędów mniejszych od n o bazie B i relacje zachodzące między przedmiotami rzędów mniejszych od n o bazie B. Od pojęcia rzędu przedmiotu o bazie B odróżniamy pojęcie typu przedmiotu o bazie B. Elementom zbioru B przyporządkowujemy typ 0, podzbiorom zbioru B typ (0), relacjom dwuczłonowym między elementami zbioru B typ (0, 0), relacjom trójczłonowym między elementami zbioru B typ (0, 0, 0) itp. Widać stąd, że przedmioty tego samego rzędu o bazie B mogą należeć do różnych typów o bazie B. Przyjmując te odróżnienia, nie zakładamy bynajmniej teorii typów logicznych. Wśród zbiorów drugiego rzędu o bazie B występują zbiory, których elementy są typu (0) o bazie B, a także zbiory, których elementy należą do typów 0 lub (0) o bazie B. Teoria typów logicznych wyklucza istnienie zbiorów, których elementy należą do różnych typów logicznych, oraz przyjmuje ograniczenia dotyczące sensowności wyrażeń, w których mówi się o zbiorach i relacjach. W zarysowanej powyżej klasyfikacji przedmiotów różnych rzędów i typów o bazie B ustalamy hierarchię przedmiotów, które można uzyskać wychodząc od zbioru B i stosując operacje określania zbiorów dopuszczalne na gruncie aksjomatycznej teorii mnogości. Nie przyjmujemy również ograniczeń sensowności formułowanych w ramach teorii typów logicznych. Zbiór przedmiotów typu t o bazie B będziemy oznaczać symbolem B^t (przy czym w myśl podanych powyżej wyjaśnień $B^0 = B$).

Funkcja interpretująca f przyporządkowuje stałym indywidualnym określone przedmioty zerowego rzędu o bazie B, jednoargumentowym stałym predykatowym k-go rzędu ($k \geq 1$) - określone zbiory k-go rzędu o bazie B, n-argumentowym ($n > 1$) stałym predykatowym k-go rzędu ($k \geq 1$) - określone n-członowe relacje k-go rzędu ($k \geq 1$) o bazie B, zaś n-argumentowym ($n \geq 1$) stałym funkcyjnym k-go rzędu ($k \geq 1$) - określone n-argumentowe funkcje k-go rzędu o bazie B. Jeśli przy tym P jest predykatem o kategorii składniowej $\frac{z}{k_1 \ldots k_n}$, a jego argumentom są przyporządkowane odpowiednio określone przedmioty typów t_1, ..., t_n o bazie B, to funkcja f przyporządkowuje predykatowi P określony przedmiot typu (t_1, ..., t_n) o bazie B.

Od funkcji interpretującej odróżniamy klasę funkcji wartościujących (wartościowań). Są one określone na zbiorze wszystkich zmiennych języka J i przyporządkowują zmiennym odpowiednie przedmioty typu t o bazie B.

Będziemy określać spełnianie wyrażenia φ w modelu M przy wartościowaniu h. Przyjmujemy oznaczenie:

$W_M(\varphi, h) = 1 \equiv$ wyrażenie φ jest spełnione w modelu M przy wartościowaniu h.

Zmiennych b, b_1, b_2, ... używamy jako zmiennych metajęzyka przebiegających zbiór wszystkich przedmiotów o bazie B, które są przyporządkowane wyrażeniom języka J przez funkcję interpretującą f lub przez funkcje wartościujące.

W definicji posłużymy się też następującymi oznaczeniami: $\ulcorner W_0(W_1, ..., W_n)\urcorner$ ($n \geq 1$) jest dowolnym wyrażeniem atomicznym k-go rzędu ($k \geq 1$) języka J, w którym W_0 jest n-argumentowym predykatem k-go rzędu lub zmienną tej kategorii składniowej, a W_1, ..., W_n są jego argumentami będącymi stałymi pozalogicznymi lub zmiennymi. Należący do metajęzyka symbol x_i^t oznacza zmienną języka J, której wartościowanie przyporządkowuje przedmioty typu t o bazie B. Funkcja $h\binom{i}{b}$ jest funkcją otrzymaną z funkcji h przez zastąpienie jej wartości dla i-go argumentu przez przedmiot b.

Podajemy obecnie indukcyjną definicję spełniania wyrażenia zdaniowego języka J w modelu M przy wartościowaniu h:

D1. 1°. $W_M\left(\ulcorner W_0\left(W_1, ..., W_n\right)\urcorner, h\right) = 1 \equiv W_0^*\left(W_1^*, ..., W_n^*\right)$,

gdzie dla $0 \leq i \leq n$: $W_i^* = \begin{cases} f(W_i), \text{ jeśli } W_i \text{ jest stałą} \\ h(W_i), \text{ jeśli } W_i \text{ jest zmienną} \end{cases}$

2°. a. $W_M(\ulcorner \sim\varphi \urcorner, h) = 1 \equiv W_M(\varphi, h) \neq 1$

b. $W_M(\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner, h) = 1 \equiv W_M(\varphi, h) = 1 \wedge W_M(\psi, h) = 1$

c. $W_M(\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner, h) = 1 \equiv W_M(\varphi, h) = 1 \vee W_M(\psi, h) = 1$

3° a. $W_M\left(\ulcorner \underset{x_i^t}{\forall} \varphi \urcorner, h\right) = 1 \equiv \underset{b \in B^t}{\forall} W_M\left(\varphi, h\binom{i}{b}\right) = 1$

b. $W_M\left(\ulcorner \underset{x_i^t}{\exists} \varphi \urcorner, h\right) = 1 \equiv \underset{b \in B^t}{\exists} W_M\left(\varphi, h\binom{i}{b}\right) = 1$

Posługujemy się oznaczeniem:

$R^{(1)}(b_1) \equiv b_1 \in R^{(1)}$

$R^{(n)}(b_1, ..., b_n) \equiv \langle b_1, ..., b_n \rangle \in R^{(n)}$, dla $n > 1$

D2. $E!\ R^{(n)} \equiv \underset{b_1, \ldots, b_n}{\exists} R^{(n)} (b_1, \ldots, b_n)$

Używając tej Russellowskiej symboliki, wyrażenie "$E!$ $\mathrm{R}^{(n)}$" czytamy: istnieje relacja (zbiór) $R^{(n)}$. Chodzi tu więc o istnienie relacji (zbioru) w sensie jej (jego) niepustości. Traktując stany rzeczy opisywane przez wyrażenia zdaniowe jako pewnego rodzaju relacje (zbiory), będziemy w tym sensie mówić o ich istnieniu lub nieistnieniu.

D3. $R^{(n)} \mid b_1, \ldots, b_n = R^{(n)} \cap (\{b_1\} \times \ldots \times \{b_n\})$

Relację $R^{(n)} \mid b_1, .., b_n$ nazwiemy relacją $R^{(n)}$ ograniczoną do ciągu przedmiotów $b_1, \ldots, b_n$ (do przedmiotu b_1 – w wypadku, gdy n = 1).

D4. $(R^{(n)} \cdot Q^{(m)}) (b_1, \ldots, b_{n+m}) \equiv R^{(n)} (b_1, \ldots, b_n) \wedge Q^{(m)} (b_{n+1}, \ldots, b_{n+m})$

Relację określoną w **D4** nazwiemy rozszerzonym iloczynem relacji $R^{(n)}$ i $Q^{(m)}$, a relację określoną w **D5** ich rozszerzoną sumą.

D5. $(R^{(n)} + Q^{(m)}) (b_1, \ldots, b_{n+m}) \equiv R^{(n)} (b_1, \ldots, b_n) \vee Q^{(m)} (b_{n+1}, \ldots, b_{n+m})$

D6. a. $\overset{i^t}{gen}\ R^{(n)} (b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \equiv$

$\equiv \underset{b \in B^t}{\forall} R^{(n)} (b_1, \ldots, b_{i-1}, b, b_{i+1}, \ldots, b_n)$, *dla* $n > 1$

b. $\overset{1^t}{gen}\ R^{(1)} = \left\{b: \underset{b \in B^t}{\forall} R^{(1)} (b)\right\}$

Operację określoną w **D6** nazwiemy generalizacją relacji $R^{(n)}$ względem i-go argumentu należącego do zbioru B^t.

D7. a. $\overset{i^t}{ex}\ R^{(n)} (b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \equiv$

$\equiv \underset{b \in B^t}{\exists} R^{(n)} (b_1, \ldots, b_{i-1}, b, b_{i+1}, \ldots, b_n)$, *dla* $n > 1$

b. $\overset{1^t}{ex}\ R^{(1)} = \left\{b: \underset{b \in B^t}{\exists} R^{(1)} (b)\right\}$

Operację określoną w **D7** nazwiemy partykularyzacją relacji $R^{(n)}$ względem i-go argumentu należącego do zbioru B^t. Operacje określone w **D6**, **D7** zastosowane do relacji n-członowych dają w wyniku relacje (n-1)-członowe w wypadku, gdy n > 1.

D8. a. $dR^{(n)} = -R^{(n)}$

b. $d\left(R^{(n)} \mid b_1, \ldots, b_n\right) = \left(dR^{(n)}\right) \mid b_1, \ldots, b_n$

c. $d\left(R^{(n)} \cdot Q^{(m)}\right) = \left(dR^{(n)}\right) + \left(dQ^{(m)}\right)$

d. $d\left(R^{(n)} + Q^{(m)}\right) = \left(dR^{(n)}\right) \cdot \left(dQ^{(m)}\right)$

e. $d\left(\overset{i^t}{gen}\ R^{(n)}\right) = \overset{i^t}{ex}\left(dR^{(n)}\right)$

f. $d\left(\overset{i^t}{ex}\ R^{(n)}\right) = \overset{i^t}{gen}\left(dR^{(n)}\right)$

Na podstawie wprowadzonych definicji dowodzi się podanych poniżej lematów.

L1. $E!R^{(n)}\ |b_1, \ldots, b_n \equiv R^{(n)}\left(b_1, \ldots, b_n\right)$

Dow. $E!R^{(n)}\ |b_1, \ldots, b_n \equiv \underset{a_1, \ldots, a_n}{\exists}\left(R^{(n)}\left(a_1, \ldots, a_n\right) \wedge a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n\right) \equiv$

$\equiv R^{(n)}\left(b_1, \ldots, b_n\right)$ **(D2, D3)**

Z równoważności: $R^{(1)}(b_1) \equiv b_1 \in R^{(1)}$ i **L1** wynika

Wn.1. $E!R^{(1)}\ |b_1 \equiv E! \in |b_1, R^{(1)} \equiv b_1 \in R^{(1)}$

L2. a. $E!\left(R^{(n)} \cdot Q^{(m)}\right) \equiv E!R^{(n)} \wedge E!Q^{(m)}$ **(D2, D4)**

b. $E!\left(R^{(n)} + Q^{(m)}\right) \equiv E!R^{(n)} \vee E!Q^{(m)}$ **(D2, D5)**

L3. a. $E!\overset{i^t}{gen}\ R^{(n)}\ |b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n \equiv$

$\equiv \underset{b \in B^t}{\forall} R^{(n)}\left(b_1, \ldots, b_{i-1}, b, b_{i+1}, \ldots, b_n\right)$

Dow. Dla n > 1 na podstawie **D2**, **L1**, **D6.**a. otrzymujemy równoważności:

$$E!\overset{i^t}{gen}\ R^{(n)}\ |b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n \equiv$$

$$\equiv \overset{i^t}{gen}\ R^{(n)}\left(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\right) \equiv$$

$$\equiv \underset{b \in B^t}{\forall} R^{(n)}\left(b_1, \ldots, b_{i-1}, b, b_{i+1}, \ldots, b_n\right)$$

z których wynika **L3.**a.

Dla $n = 1$ na podstawie tezy: $E!\ \{b: p\} \equiv p$ i **D6**.b. otrzymujemy:

$$E!\overset{1^t}{gen}\ R^{(1)} \equiv \forall_{b \in B^t} R^{(1)}(b)$$

L3. b. $E!\overset{i^t}{ex}\ R^{(n)}\ |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n \equiv$

$$\equiv \exists_{b \in B^t} R^{(n)}\left(b_1, ..., b_{i-1}, b, b_{i+1}, ..., b_n\right)$$

Dow. Dla $n > 1$ na podstawie **D2**, **L1**, **D7**.a. otrzymujemy równoważności:

$$E!\overset{i^t}{ex}\ R^{(n)}\ |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n \equiv$$

$$\equiv \overset{i^t}{ex}\ R^{(n)}\left(b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n\right) \equiv$$

$$\equiv \exists_{b \in B^t} R^{(n)}\left(b_1, ..., b_{i-1}, b, b_{i+1}, ..., b_n\right)$$

z których wynika **L3.**b.

Dla $n = 1$ na podstawie tezy: $E!\ \{b: p\} \equiv p$ i **D7.**b. otrzymujemy:

$$E!\overset{1^t}{ex}\ R^{(1)} \equiv \exists_{b \in B^t} R^{(1)}(b)$$

L4. a. $\sim E!R^{(n)}\ |b_1, ..., b_n \equiv E!\ dR^{(n)}\ |b_1, ..., b_n$ (**L1**, **D8.**a.,b.)

b. $\sim E!\left(R^{(n)} \cdot Q^{(m)}\right)\ |b_1, ..., b_{n+m} \equiv$

$\equiv E!d\left(R^{(n)} \cdot Q^{(m)}\right)\ |b_1, ..., b_{n+m}$ (**L1**, **D4**, **D5**, **D8.**a.,c.)

c. $\sim E!\left(R^{(n)} + Q^{(m)}\right)\ |b_1, ..., b_{n+m} \equiv$

$\equiv E!d\left(R^{(n)} + Q^{(m)}\right)\ |b_1, ..., b_{n+m}$ (**L1**, **D4**, **D5**, **D8.**a.,d.)

d. $\sim E!\left(\overset{i^t}{gen}\ R^{(n)}\right)\ |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n \equiv$

$\equiv E!d\left(\overset{i^t}{gen}\ R^{(n)}\right)\ |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n$

Dow. Na podstawie **L3.**a, b, **D8.**a, b, e otrzymujemy równoważności:

$$\sim E!\left(\overset{i^t}{gen}\ R^{(n)}\right)\ |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n \equiv$$

$$\equiv \sim \underset{b \in B^t}{\forall} R^{(n)} \left(b_1, ..., b_{i-1}, b, b_{i+1}, ..., b_n\right) \equiv$$

$$\equiv \underset{b \in B^t}{\exists} \sim R^{(n)} \left(b_1, ..., b_{i-1}, b, b_{i+1}, ..., b_n\right) \equiv$$

$$\equiv \overset{i^t}{ex}\; dR^{(n)} \left(b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n\right) \equiv$$

$$\equiv E!d\left(\overset{i^t}{gen}\; R^{(n)}\right) |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n$$

z których wynika **L4.**d.

e. $$\sim E!\left(\overset{i^t}{ex}\; R^{(n)}\right) |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n \equiv$$

$$\equiv E!d\left(\overset{i^t}{ex}\; R^{(n)}\right) |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n$$

Dow. Na podstawie **L3.**a, b, **D8.**a, b, f otrzymujemy równoważności:

$$\sim E!\left(\overset{i^t}{ex}\; R^{(n)}\right) |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n \equiv$$

$$\equiv \sim \underset{b \in B^t}{\exists} R^{(n)} \left(b_1, ..., b_{i-1}, b, b_{i+1}, ..., b_n\right) \equiv$$

$$\equiv \underset{b \in B^t}{\forall} \sim R^{(n)} \left(b_1, ..., b_{i-1}, b, b_{i+1}, ..., b_n\right) \equiv$$

$$\equiv \overset{i^t}{gen}\; dR^{(n)} \left(b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n\right) \equiv$$

$$\equiv E!d\left(\overset{i^t}{ex}\; R^{(n)}\right) |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n$$

z których wynika **L4.**e.

f. $ddR^{(n)} = R^{(n)}$ (**D8.**a-f)

Z L4a-f wynika:

L5. Jeśli R należy do najmniejszej klasy, do której należą relacje o postaci $R^{(n)} \mid b_1, ..., b_n$ i która jest zamknięta ze względu na operacje określone w **D4**, **D5**, **D6**, **D7**, **D8**, to $\sim E!R \equiv E!dR$

L6. a. $$E!\overset{i^t}{gen}\; R^{(n)} |b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n \equiv$$

$$\equiv \underset{b \in B^t}{\forall} E!R^{(n)} \,|b_1, ..., b_{i-1}, b, b_{i+1}, ..., b_n \qquad (\mathbf{L3}.\text{a}, \mathbf{L1})$$

b. $$E! \overset{i^t}{ex}\, R^{(n)} \,|b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n \equiv$$

$$\equiv \underset{b \in B^t}{\exists} E!R^{(n)} \,|b_1, ..., b_{i-1}, b, b_{i+1}, ..., b_n \qquad (\mathbf{L3}.\text{b}, \mathbf{L1})$$

Posługując się wprowadzonymi pojęciami, określamy stan rzeczy opisywany przez wyrażenie zdaniowe φ języka *J* w modelu *M* przy wartościowaniu *h*, dla którego używamy symbolu: S_M (φ, *h*). Definicja tego pojęcia jest definicją indukcyjną. Określając w punkcie 1° tej definicji stan rzeczy opisywany przez wyrażenie atomiczne, oznaczamy je tak samo jak w **D1.** 1°.

D9. 1°. $$S_M\left(\ulcorner W_0\left(W_1, ..., W_n\right)\urcorner, h\right) = W_0^* \,|W_1^*, ..., W_n^*,$$

gdzie dla $0 \le i \le n$: $$W_i^* = \begin{cases} f(W_i), \text{ jeśli } W_i \text{ jest stałą} \\ h(W_i), \text{ jeśli } W_i \text{ jest zmienną} \end{cases}$$

2°. a. $S_M(\ulcorner \sim\varphi \urcorner, h) = dS_M(\varphi, h)$

b. $S_M(\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner, h) = S_M(\varphi, h) \cdot S_M(\psi, h)$

c. $S_M(\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner, h) = S_M(\varphi, h) + S_M(\psi, h)$

3° a. $$S_M\left(\ulcorner \underset{x_i^t}{\forall} \varphi \urcorner, h\right) = \overset{i^t}{gen}\, S_M(\varphi, h)$$

b. $$S_M\left(\ulcorner \underset{x_i^t}{\exists} \varphi \urcorner, h\right) = \overset{i^t}{ex}\, S_M(\varphi, h)$$

T1. Jeśli φ jest wyrażeniem zdaniowym języka *J*, to $W_M(\varphi, h) = 1 \equiv E!S_M(\varphi, h)$, a więc: wyrażenie zdaniowe φ języka *J* jest spełnione w modelu *M* przy wartościowaniu *h* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stan rzeczy opisywany przez wyrażenie φ w modelu *M* przy wartościowaniu *h*.

Dowód **T1** jest indukcyjny.

a. Dla wyrażeń atomicznych otrzymujemy:

1. $$W_M\left(\ulcorner W_0\left(W_1, ..., W_n\right)\urcorner, h\right) = 1 \equiv W_0^*\left(W_1^*, ..., W_n^*\right),$$

gdzie dla $0 \le i \le n$: $$W_i^* = \begin{cases} f(W_i), \text{ jeśli } W_i \text{ jest stałą} \\ h(W_i), \text{ jeśli } W_i \text{ jest zmienną} \end{cases} \qquad \mathbf{D1.1}$$

2. $E!S_M(\ulcorner W_0(W_1, ..., W_n)\urcorner, h) \equiv E!W_0^* \,|W_1^*, ..., W_n^*,$

gdzie dla $0 \leq i \leq n$: $W_i^* = \begin{cases} f(W_i), \text{ jeśli } W_i \text{ jest stałą} \\ h(W_i), \text{ jeśli } W_i \text{ jest zmienną} \end{cases}$ **D9.1**

3. $E!W_0^* \,|W_1^*, ..., W_n^* \equiv W_0^*(W_1^*, ..., W_n^*)$ **L1**

$W_M(\ulcorner W_0(W_1, ..., W_n)\urcorner, h) = 1 \equiv E!S_M(\ulcorner W_0(W_1, ..., W_n)\urcorner, h)$ **1, 2, 3**

b. 1. $W_M(\varphi, h) = 1 \equiv E!S_M(\varphi, h)$ z.ind.

2. $W_M(\varphi, h) \neq 1 \equiv {\sim}E!S_M(\varphi, h)$ **1**

$W_M(\ulcorner{\sim}\varphi\urcorner, h) = 1 \equiv E!S_M(\ulcorner{\sim}\varphi\urcorner, h)$ **2, D1. 2a, L5, D9.2a**

c. 1. $W_M(\varphi, h) = 1 \equiv E!S_M(\varphi, h)$ z.ind.

2. $W_M(\psi, h) = 1 \equiv E!S_M(\psi, h)$ z.ind.

3. $W_M(\varphi, h) = 1 \wedge W_M(\psi, h) = 1 \equiv E!S_M(\varphi, h) \wedge E!S_M(\psi, h)$ **1, 2**

$W_M(\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner, h) = 1 \equiv E!S_M(\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner, h)$ **D1. 2b, L2.a, D9.2b**

d. 1. $W_M(\varphi, h) = 1 \equiv E!S_M(\varphi, h)$ z.ind.

2. $W_M(\psi, h) = 1 \equiv E!S_M(\psi, h)$ z.ind.

3. $W_M(\varphi, h) = 1 \vee W_M(\psi, h) = 1 \equiv E!S_M(\varphi, h) \vee E!S_M(\psi, h)$ **1, 2**

$W_M(\ulcorner\varphi \vee \psi\urcorner, h) = 1 \equiv E!S_M(\ulcorner\varphi \vee \psi\urcorner, h)$ **D1. 2c, L2.b, D9.2c**

e. 1. $W_M\left(\varphi, h\binom{i}{b}\right) = 1 \equiv E!S_M\left(\varphi, h\binom{i}{b}\right)$ z.ind.

2. $W_M\left(\ulcorner\forall_{x_i^t} \varphi\urcorner, h\right) = 1 \equiv \forall_{b \in B^t} W_M\left(\varphi, h\binom{i}{b}\right) = 1$ **D1. 3a**

3. $E!S_M\left(\ulcorner\forall_{x_i^t} \varphi\urcorner, h\right) \equiv E!\overset{i^t}{gen}\, S_M(\varphi, h)$ **D9. 3a**

4. $E!\overset{i^t}{gen}\, S_M(\varphi, h) \equiv \forall_{b \in B^t} E!S_M\left(\varphi, h\binom{i}{b}\right)$ **L6.a**

$W_M\left(\ulcorner\forall_{x_i^t} \varphi\urcorner, h\right) = 1 \equiv E!S_M\left(\ulcorner\forall_{x_i^t} \varphi\urcorner, h\right)$ **1, 2, 3, 4**

f. 1. $W_M\left(\varphi, h\binom{i}{b}\right) = 1 \equiv E!S_M\left(\varphi, h\binom{i}{b}\right)$ z.ind.

2. $W_M\left(\ulcorner\exists_{x_i^t} \varphi\urcorner, h\right) = 1 \equiv \exists_{b \in B^t} W_M\left(\varphi, h\binom{i}{b}\right) = 1$ **D1. 3b**

3. $E!S_M\left(\ulcorner\exists_{x_i^t} \varphi\urcorner, h\right) \equiv E!\overset{i^t}{ex}\, S_M(\varphi, h)$ **D9. 3b**

4. $E!\overset{i^t}{ex}\ S_M\ (\varphi,\ h) \equiv \underset{b\,\in\,\boldsymbol{B}^t}{\exists}\ E!S_M\left(\varphi,\ h\binom{i}{b}\right)$ **L6.b**

$W_M\left(\ulcorner\underset{x_i^t}{\exists}\ \varphi\urcorner,\ h\right) = 1 \equiv E!S_M\left(\ulcorner\underset{x_i^t}{\exists}\ \varphi\urcorner,\ h\right)$ **1, 2, 3, 4**

Dwie definicje prawdziwości wyrażenia zdaniowego φ w modelu M mają postać:

D10. $\varphi \in Vr_1(M) \equiv \underset{h}{\forall}\ W_M(\varphi,\ h) = 1$

Wyrażenie φ jest prawdziwe w modelu M wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest spełnione w modelu M przy każdym wartościowaniu.

D11. $\varphi \in Vr_2(M) \equiv \underset{h}{\forall}\ E!S_M(\varphi,\ h)$

Wyrażenie φ jest prawdziwe w modelu M wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym wartościowaniu istnieje stan rzeczy opisywany przez wyrażenie φ w modelu M przy tym wartościowaniu.

Z **T1**, **D10**, **D11** wynika

T2. $\varphi \in Vr_1(M) \equiv \varphi \in Vr_2(M)$

Udowodniliśmy więc równoważność tych dwóch definicji prawdziwości wyrażeń zdaniowych języka J w modelu M.

Równoważność sformułowana w **T1** może służyć jako definicja spełniania wyrażenia w modelu M przy wartościowaniu h za pomocą pojęcia określonego w **D9**. Na podstawie takiej definicji można dla spełniania udowodnić warunki podane w **D1**.

Na podstawie **D9** dla każdego wyrażenia zdaniowego φ języka J można podać stan rzeczy opisywany przez φ w modelu M przy wartościowaniu h. Taki stan rzeczy jest relacją o postaci $R^{(n)} \mid b_1, ..., b_n$, przy czym relacja $R^{(n)}$ może być utworzona z jakichś relacji za pomocą operacji określonych w definicjach **D4--D8**. Podamy kilka przykładów stanów rzeczy opisywanych przez określone wyrażenia.

Przyjmijmy, że język J jest językiem arytmetyki liczb naturalnych, model $M = \langle N, f\rangle$, gdzie N jest zbiorem liczb naturalnych, a f jest funkcją przyporządkowującą stałym arytmetyki liczb naturalnych denotowane przez nie przedmioty o bazie N.

Przykład 1. Przyjmijmy, że φ = "$x_1 < x_2$", a wartościowanie h przyporządkowuje zmiennej x_1 liczbę 2, zaś zmiennej x_2 liczbę 3. Wtedy $S_M(\varphi, h) = <|\,2, 3$. Stwierdzamy, że $E!\ S_M(\varphi, h)$, gdyż $2 < 3$.

Przykład 2. Przyjmijmy, że φ = "$x_1 < x_2$", a wartościowanie h przyporządkowuje zmiennej x_1 liczbę 3, zaś zmiennej x_2 liczbę 2. Wtedy $S_M(\varphi, h) = <|\,3, 2$. Stwierdzamy, że $\sim E!\ S_M(\varphi, h)$, bo $\sim 3 < 2$.

Przykład 3. Przyjmijmy, że φ = "$2 < 3$". Wtedy dla dowolnego h $S_M(\varphi, h) =$ $= <|\,2, 3$. Stwierdzamy, że $E!\ S_M(\varphi, h)$.

Przykład 4. Przyjmijmy, że φ = "$x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3$", a wartościowanie h przyporządkowuje zmiennym x_1, x_2, x_3 odpowiednio liczby 2, 3, 4. Wtedy $S_M(\varphi, h) =$ $= (< \bullet <)\,|\,2, 3, 3, 4$.

Przykład 5. Przyjmijmy, że φ = "$x_2 < x_3 \wedge x_1 < x_2$", a h jest tą samą funkcją, co w przykładzie 4. Wtedy $S_M(\varphi, h) = (< \bullet <)\,|\,3, 4, 2, 3$.

Z przykładów 4 i 5 widać, że - jak o tym była mowa w pracy cytowanej na wstępie - stany rzeczy opisywane przez wyrażenia równoważne, czy nawet logicznie równoważne, przy tym samym wartościowaniu, nie muszą być identyczne. Natomiast jeśli φ jest równoważne z ψ, to $E!\ S_M(\varphi, h) \equiv E!\ S_M(\psi, h)$.

Przykład 6. Przyjmijmy, że φ = "$\underset{x_2}{\exists}(x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3)$", a wartościowanie h przyporządkowuje zmiennej x_1 liczbę 2, a zmiennej x_3 liczbę 4. (Pominęliśmy tu górny wskaźnik 0 przy zmiennej, której wartościowania przyporządkowują przedmioty typu 0 o bazie N). Wtedy $S_M(\varphi, h) = \overset{2}{ex}(< \bullet <)|2, 4$. Stwierdzamy, że $E!\ S_M(\varphi, h)$, gdyż $\underset{b \in N}{\exists}(2 < b \wedge b < 4)$.

Przykład 7. Przyjmijmy, że φ = "$\underset{x_1}{\forall}\ \underset{x_2}{\exists}\ x_1 < x_2$". Wtedy dla dowolnego h:

$S_M(\varphi, h) = \overset{1}{gen}\ \overset{2}{ex} <|b_1, b_2$. Stwierdzamy, że $E!\ S_M(\varphi, h)$, gdyż $\underset{b_1 \in N}{\forall}\ \underset{b_2 \in N}{\exists}\ b_1 < b_2$.

Przykład 8. Przyjmijmy, że φ = "$\underset{x_2}{\forall}\ \underset{x_1}{\exists}\ x_1 < x_2$". Wtedy dla dowolnego h:

$S_M(\varphi, h) = \overset{2}{gen}\ \overset{1}{ex} <|b_1, b_2$. Stwierdzamy, że $\sim E!\ S_M(\varphi, h)$, gdyż

$\sim \underset{b_2 \in N}{\forall}\ \underset{b_1 \in N}{\exists}\ b_1 < b_2$.

Ogólnie, jeśli wyrażenie φ jest utworzone za pomocą stałych logicznych (funktorów rachunku zdań, kwantyfikatorów) $s_1, ..., s_k$ z wyrażeń atomicznych φ_1, ..., φ_m, zbudowanych odpowiednio z predykatów lub zmiennych predykatowych P_1, ..., P_m i ich argumentów, to $S_M(\varphi, h)$ jest utworzony z $S_M(\varphi_1, h)$, ..., $S_M(\varphi_m, h)$ za pomocą operacji odpowiadających w myśl **D9** stałym s_1, ..., s_k, i ma postać relacji $R^{(n)} | b_1$, ..., b_n, gdzie relacja $R^{(n)}$ jest utworzona z relacji R_1, ..., R_m, przyporządkowanych odpowiednio przez f lub h predykatom lub zmiennym predykatowym P_1, ..., P_m za pomocą operacji odpowiadających w myśl **D9** stałym s_1, ..., s_k.

Stąd, że wyrażenie $\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner$ można zdefiniować jako $\ulcorner{\sim}\varphi \vee \psi\urcorner$, a wyrażenie $\ulcorner\varphi \equiv \psi\urcorner$ można zdefiniować jako $\ulcorner(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)\urcorner$, wynika, że

$S_M(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner, h) = (dS_M(\varphi, h)) + (S_M(\psi, h))$ oraz że

$S_M(\ulcorner\varphi \equiv \psi\urcorner, h) = S_M(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner, h) \cdot S_M(\ulcorner\psi \to \varphi\urcorner, h)$.

Podajemy obecnie kilka przykładów wskazujących, że pojęcie zdefiniowane w **D9** ma ten sam sens intuicyjny co pojęcie stanu rzeczy wprowadzone przez pewnych autorów.

Stanem rzeczy opisywanym przez zdanie "3 > 2" jest bycie większym liczby 3 od liczby 2. Ten stan rzeczy może być uważany za relację $> | 3, 2$, tj. relację większości ograniczoną w dziedzinie do zbioru {3}, a w przeciwdziedzinie do zbioru {2}.

Stanem rzeczy opisywanym przez zdanie "$2 \in N$" jest przynależność liczby 2 do zbioru N. Ten stan rzeczy może być uważany za relację $\in | 2, N$, tj. relację bycia elementem ograniczoną w dziedzinie do zbioru {2}, a w przeciwdziedzinie do zbioru $\{N\}$.

Stanem rzeczy opisywanym przez zdanie "$4 > 3 \wedge 3 > 2$" jest bycie większym liczby 4 od liczby 3 i bycie większym liczby 3 od liczby 2. Ten stan rzeczy może być uważany za relację $(> \bullet >) | 4, 3, 3, 2$, tj. relację zachodzącą między liczbami 4, 3, 2 wtedy i tylko wtedy, gdy $E! \, (> \bullet >) | 4, 3, 3, 2$, tj. wtedy i tylko wtedy, gdy $4 > 3 \wedge 3 > 2$.

S u m m a r y

A PROOF OF THE EQUIVALENCE OF TWO FORMULATIONS OF THE CLASSICAL DEFINITION OF TRUTH

The paper contains a proof of the equivalence of two formulations of the classical definition of truth. The first definition, accepted now in logic, is formulated by means of the concept of satisfaction of the expression φ in the model M under the valuation h. In the second definition the concept of the state of affairs (Sachverhalt) described by the expression φ in the model M under the valuation h is used. This concept is defined inductively (D9). It is proved (T1) that the expression φ is satisfied in the model M under the valuation h if and only if the state of affairs described by the expression φ in the model M under the valuation h exists. According to the first definition (D10) the expression φ is true in the model M if and only if φ is satisfied in M under every valuation h. According to the second definition the expression φ is true in the model M if and only if for every valuation h the state of affairs described by φ in M under the valuation h exists. By virtue of T1 the equivalence of these two definitions is proved (T2). The second definition formulates by means of terms of contemporary formal logic the definition stating that a proposition is true if and only if the state of affairs (Sachverhalt) described by it exists.