ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXV, zeszyt 1 — 1977

LUDWIK BORKOWSKI

TWIERDZENIE LINDENBAUMA DLA KONSEKWENCJI DOWOLNEJ MOCY [1]

Przyjmujemy następujące oznaczenia:
Zbiór S jest dowolnym zbiorem wyrażeń zdaniowych. Litera x oznacza dowolne elementy zbioru S, litery A, B, C, X, Y, Z — jego podzbiory, litery K, L — zbiory jego podzbiorów, litery α, β, γ, δ — liczby porządkowe.

Funkcja konsekwencji, oznaczona symbolem „Cn", i zbiór S są scharakteryzowane przez aksjomaty:

A1 $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_\gamma$, gdzie γ jest jakąś liczbą porządkową
A2 $X \subset CnX \subset S$
A3 $X \subset Y \rightarrow CnX \subset CnY$
A4 $CnCnX \subset CnX$

Mocą konsekwencji jest najmniejsza liczba kardynalna $\aleph_\alpha$ spełniająca warunek: $\bigwedge\limits_{x} (CnX \subset \bigcup\limits_{Y \subset X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_\alpha} CnY)$

A5 stwierdza, że mocą konsekwencji jest liczba $\aleph_\alpha$, gdzie α jest jakąś liczbą porządkową. Z uwagi na określenie mocy konsekwencji można aksjomat ten zapisać w postaci dwóch tez:

A5 $CnX \subset \bigcup\limits_{Y \subset X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_\alpha} CnY$

$\bigwedge\limits_{\beta}\bigwedge\limits_{X} (CnX \subset \bigcup\limits_{Y \subset X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_\beta} CnY \rightarrow \alpha \leqslant \beta)$

W artykule tym będziemy korzystać tylko z pierwszej z nich.

A1 stwierdza, że S jest zbiorem dobrze uporządkowanym. W przypadku $\gamma = 0$ otrzymujemy aksjomat zwykłej teorii konsekwencji. Potrzeba

[1] Artykuł ten jest fragmentem większej pracy poświęconej własnościom konsekwencji dowolnej mocy. Aksjomatyczną teorię konsekwencji zbudował A. Tarski (*Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften*. „Monatshefte für Mathematik und Physik" 37:1930).

ogólniejszego ujęcia jest motywowana tym, że obecnie rozpatruje się w teorii systemów dedukcyjnych również języki o nieprzeliczalnej liczbie stałych, a więc i nieprzeliczalnej liczbie wyrażeń zdaniowych.

W przypadku $\alpha = 0$ aksjomat A5 przechodzi w aksjomat o finitystyczności konsekwencji. Potrzeba ogólniejszego ujęcia jest motywowana tym, że w logice rozpatruje się również reguły o nieskończonej liczbie przesłanek (taką jest np. reguła ω). Konsekwencja wyznaczona przez takie reguły nie jest finitystyczna. Jeśli $\alpha = 1$, to z A5 otrzymujemy aksjomat o przeliczalności konsekwencji.

Zadaniem tego artykułu jest udowodnienie pewnego uogólnienia twierdzenia Lindenbauma (o maksymalizacji) dla konsekwencji dowolnej mocy. Twierdzeniem tym jest T7. Twierdzenie Lindenbauma otrzymujemy z T7 przyjmując, że $\alpha = 0$.

Przyjmujemy definicje:

D1 $X \in Syst \equiv CnX \subset X$

D2 $Y \in Aeq(X) \equiv CnX = CnY$

D3 $X \in Nsp \equiv X \notin Aeq(S)$

D4 $X \in Zpl \equiv \bigwedge\limits_{x} (x \in CnX \vee X \cup \{x\} \notin Nsp)$

W dowodach będziemy korzystać — bez zaznaczenia tego — z różnych twierdzeń algebry zbiorów i teorii mnogości, m. in. z twierdzeń:

$$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

$$\overline{\overline{K}} < \aleph_\alpha \wedge \bigwedge_{X \in K} \overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha \to \overline{\overline{\bigcup_{X \in K} X}} < \aleph_\alpha$$

$$\overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha \wedge X \subset \bigcup_{X \in K} X \to \bigvee_{L} (L \subset K \wedge \overline{\overline{L}} < \aleph_\alpha \wedge X \subset \bigcup_{X \in L} X)$$

Będziemy też korzystać z podanych poniżej lematów wyprowadzalnych z A2, A3 i definicji.

L1 $X \subset Y \wedge Y \in Nsp \to X \in Nsp$

L2 $X \in Nsp \equiv CnX \in Nsp$

Po każdym twierdzeniu zostanie podany jego dowód w sformalizowanym zapisie założeniowym [2].

[2] Por. J. Słupecki, L. Borkowski. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*. Warszawa 1963; L. Borkowski. *Logika formalna*. Warszawa 1970.

T1	$\overline{\overline{Y}} < \aleph_\alpha \wedge Y \subset CnX \rightarrow \bigvee_{Z} (\overline{\overline{Z}} < \aleph_\alpha \wedge Z \subset X \wedge Y \subset CnZ)$	
1	$\overline{\overline{Y}} < \aleph_\alpha$	z.
2	$Y \subset CnX$	z.
3	$Y \subset \bigcup_{Z \subset X \wedge \overline{\overline{Z}} < \aleph_\alpha} CnZ$	2, A5
1.1	$x \in Y$	z.d.
1.2	$Z_x \subset X \wedge \overline{\overline{Z}}_x < \aleph_\alpha \wedge x \in CnZ_x$	1.1, 3
1.3	$Z_x \subset \bigcup_{x \in Y} Z_x$	1.1
1.4	$CnZ_x \subset Cn(\bigcup_{x \in Y} Z_x)$	A3, 1.3
1.5	$x \in Cn(\bigcup_{x \in Y} Z_x)$	1.2, 1.4
4	$\bigwedge_{x \in Y} \overline{\overline{Z}}_x < \aleph_\alpha$	1.1 → 1.2
5	$\overline{\overline{\bigcup_{x \in Y} Z_x}} < \aleph_\alpha$	1, 4
6	$\bigwedge_{x \in Y} Z_x \subset X$	1.1 → 1.2
7	$\bigcup_{x \in Y} Z_x \subset X$	6
8	$Y \subset \bigcup_{x \in Y} CnZ_x$	1.1 → 1.5
9	$\bigwedge_{x \in Y} CnZ_x \subset Cn(\bigcup_{x \in Y} Z_x)$	1.1 → 1.4
10	$\bigcup_{x \in Y} CnZ_x \subset Cn(\bigcup_{x \in Y} Z_x)$	9
11	$Y \subset Cn(\bigcup_{x \in Y} Z_x)$	8, 10
	$\bigvee_{Z} (\overline{\overline{Z}} < \aleph_\alpha \wedge Z \subset X \wedge Y \subset CnZ)$	5, 7, 11

T2	$\bigwedge_{L} (L \subset K \wedge \overline{\overline{L}} < \aleph_\alpha \rightarrow \bigvee_{Y \in K} \bigcup_{X \in L} X \subset Y) \rightarrow Cn(\bigcup_{X \in K} X) \subset \bigcup_{X \in K} CnX$	
1	$\bigwedge_{L} (L \subset K \wedge \overline{\overline{L}} < \aleph_\alpha \rightarrow \bigvee_{Y \in K} \bigcup_{X \in L} X \subset Y)$	z.
2	$x \in Cn(\bigcup_{X \in K} X)$	z.
3	$Z_1 \subset \bigcup_{X \in K} X \wedge \overline{\overline{Z}}_1 < \aleph_\alpha \wedge x \in CnZ_1$	A5, 2.
4	$L_1 \subset K \wedge \overline{\overline{L}}_1 < \aleph_\alpha \wedge Z_1 \subset \bigcup_{X \in L_1} X$	3

5	$Y_1 \in K \wedge \bigcup_{X \in L_1} X \subset Y_1$	1, 4
6	$Z_1 \subset Y_1$	4, 5
7	$CnZ_1 \subset CnY_1$	A3, 6
8	$x \in CnY_1$	3, 7
	$x \in \bigcup_{X \in K} CnX$	8, 5

T3 $K \subset Syst \wedge \bigwedge_{L} (L \subset K \wedge \overline{\overline{L}} < \aleph_\alpha \to \bigvee_{Y \in K} \bigcup_{X \in L} X \subset Y) \to \bigcup_{X \in K} X \in Syst$

T3 wynika z T2 i D1.

T4 $\bigvee_{X} (\overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha \wedge X \in Aeq\,(B)) \wedge A \in Aeq\,(B) \to \bigvee_{C} (C \subset A \wedge \overline{\overline{C}} < \aleph_\alpha \wedge C \in Aeq\,(B))$

1	$\bigvee_{X} (\overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha \wedge X \in Aeq\,(B))$	z.
2	$A \in Aeq\,(B)$	z.
3	$X_1 < \aleph_\alpha \wedge CnX_1 = CnB$	D2, 1
4	$CnA = CnB$	D2, 2
5	$X_1 \subset CnA$	A2, 3, 4
6	$A_1 \subset A \wedge \overline{\overline{A}}_1 < \aleph_\alpha \wedge X_1 \subset CnA_1$	T1, 3, 5
7	$CnX_1 \subset CnA_1 \subset CnA$	A3, A4, 6
8	$CnA_1 = CnA$	3, 4, 7
	$\bigvee_{C} (C \subset A \wedge \overline{\overline{C}} < \aleph_\alpha \wedge C \in Aeq\,(B))$	D2, 6, 8

T5 $\bigvee_{X} (\overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha \wedge X \in Aeq\,(S)) \to [\bigwedge_{X} (X \subset A \wedge \overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha \to X \in Nsp) \to A \in Nsp]$

1	$\bigvee_{X} (\overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha \wedge X \in Aeq\,(S))$	z.
2	$\bigwedge_{X} (X \subset A \wedge \overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha \to X \in Nsp)$	z.
3	$A \notin Nsp$	z.d.n.
4	$A \in Aeq\,(S)$	D3, 3
5	$A_1 \subset A \wedge \overline{\overline{A}}_1 < \aleph_\alpha \wedge A_1 \in Aeq\,(S)$	T4, 1, 4
6	$A_1 \notin Nsp$	D3, 5
7	$A_1 \in Nsp$	2, 5
	sprz.	6, 7

T6 $\bigvee_{X} (\overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha \wedge X \in Aeq\,(S)) \wedge \bigwedge_{L} (L \subset K \wedge \overline{\overline{L}} < \aleph_\alpha \to \bigvee_{Y \in K} \bigcup_{X \in L} X \subset Y) \wedge K \subset Nsp \to \bigcup_{X \in K} X \in Nsp$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & \bigvee\limits_{X}(\overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha \wedge X \in Aeq(S)) \\ 2 & \bigwedge\limits_{L}(L \subset K \wedge \overline{\overline{L}} < \aleph_\alpha \rightarrow \bigvee\limits_{Y \in K} \bigcup\limits_{X \in L} X \subset Y) \\ 3 & K \subset Nsp \end{array}\right\} \text{z.}$$

1.1	$Y < \aleph_\alpha \wedge Y \subset \bigcup\limits_{X \in K} X$	z.d.
1.2	$L_1 \subset K \wedge \overline{\overline{L_1}} < \aleph_\alpha \wedge Y \subset \bigcup\limits_{X \in L_1} X$	1.1
1.3	$Z_1 \in K \wedge \bigcup\limits_{X \in L_1} X \subset Z_1$	2, 1.2
1.4	$Y \subset Z_1$	1.2, 1.3
1.5	$Z_1 \in Nsp$	3, 1.3
1.6	$Y \in Nsp$	1.4, 1.5, L1
4	$\bigwedge\limits_{Y}(\overline{\overline{Y}} < \aleph_\alpha \wedge Y \subset \bigcup\limits_{X \in K} X \rightarrow Y \in Nsp)$	1.1 → 1.6
	$\bigcup\limits_{X \in K} X \in Nsp$	T5, 1, 4

T7 $\bigvee\limits_{Z}(\overline{\overline{Z}} < \aleph_\alpha \wedge Z \in Aeq(S)) \rightarrow [X \in Nsp \rightarrow \bigvee\limits_{Y}(X \subset Y \wedge Y \in Syst \cap Nsp \cap Zpl)]$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & \bigvee\limits_{Z}(\overline{\overline{Z}} < \aleph_\alpha \wedge Z \in Aeq(S) \\ 2 & X \in Nsp \end{array}\right\} \text{z.}$$

3 $(x_\beta)_{\beta < \omega_\gamma}$ jest ciągiem wszystkich elementów zbioru S A1

4 Definiujemy ciąg zbiorów $(X_\beta)_{\beta < \omega_\gamma}$:

a. $X_0 = CnX$

b. $\beta + 1 < \omega_\gamma \rightarrow X_{\beta+1} = \begin{cases} Cn(X_\beta \cup \{x_\beta\} & \text{gdy } X_\beta \cup \{x_\beta\} \in Nsp \\ X_\beta & \text{gdy } X_\beta \cup \{x_\beta\} \notin Nsp \end{cases}$

c. β jest liczbą graniczną $\wedge\ \beta < \omega_\gamma \rightarrow X_\beta = \bigcup\limits_{\delta < \beta} X_\delta$

oraz

d. $X^* = \bigcup\limits_{\beta < \omega_\gamma} X_\beta$

5	$X \subset X^*$	4, A2
6	$X_0 \in Nsp$	2, 4, L2
7	$X_\beta \in Nsp \rightarrow X_{\beta+1} \in Nsp$	4
8	$\bigwedge\limits_{\beta \leqslant \omega_\gamma} \bigwedge\limits_{L}(L \subset \{X_\delta : \delta < \beta\} \rightarrow \bigvee\limits_{\delta < \omega_\gamma} \bigcup\limits_{X \in L} X \subset X_\delta)$	4
1.1	β jest liczbą graniczną $\wedge\ \beta < \omega_\gamma \bigwedge\limits_{\delta < \beta} X_\delta \in Nsp$	z.d.
1.2	$X_\beta \in Nsp$	T6, 1, 8, 1.1
9	β jest liczbą graniczną $\wedge\ \beta < \omega_\gamma \rightarrow X_\beta \in Nsp$	1.1 → 1.2, ind. pozask.

10	$\{X_\beta : \beta < \omega_\gamma\} \subset Nsp$	6, 7, 9
11	$X^* \in Nsp$	T6, 1, 8, 10, 4
12	$\{X_\beta : \beta < \omega_\gamma\} \subset Nsp$	4, 8, T3, ind. pozask.
13	$X^* \in Syst$	T3, 4, 12, 8
2.1	$X^* \cup \{x_\beta\} \in Nsp \wedge \beta < \omega_\gamma$	z.d.
2.2	$X_\beta \cup \{x_\beta\} \in Nsp$	4, 2.1, L1
2.3	$x_\beta \in X_{\beta+1}$	2.2, 4, A2
2.4	$x_\beta \in X^*$	2.3, 4
14	$\bigwedge_{\beta<\omega_\gamma} (X^* \cup \{x_\beta\} \in Nsp \rightarrow x_\beta \in X^*)$	2.1 $\rightarrow$ 2.4
3.1	$x_\beta \notin CnX^* \wedge \beta < \omega_\gamma$	z.d.
3.2	$x_\beta \notin X^*$	3.1, A2
3.3	$X^* \cup \{x_\beta\} \notin Nsp$	14, 3.1, 3.2
15	$\bigwedge_{\beta<\omega_\gamma} (x_\beta \notin CnX^* \rightarrow X^* \cup \{x_\beta\} \notin Nsp)$	3.1 $\rightarrow$ 3.3
16	$X^* \in Zpł$	15, 3, D4
	$\bigvee_Y (X \subset Y \wedge Y \in Syst \cap Nsp \cap Zpł)$	5, 11, 13, 16

LINDENBAUM'S THEOREM FOR A CONSEQUENCE OF AN ARBITRARY POWER

Summary

The paper contains a proof of a generalization of Lindenbaum's theorem (stating that for each consistent set of expressions there exists a consistent, complete system containing this set) for a consequence of an arbitrary power. The proof is carried out in the axiomatic theory of consequence with suitably generalized axioms about the power of consequence and the power of the set of significant expressions.